Лекция 5_ Лензе-Тирринг есебіндегі орбиталды тұрақтылық

Сонымен, біз айналатын сұйық шар үшін Фоктың бірінші жуықтауының нақтыланған метрикасынан бастаймыз

$$dS^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{\xi_0}{m_0 c^2}\right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0 c^2}\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)d\vec{r}^{\,2} + \frac{8}{c^2}\left(\vec{U}d\vec{r}\right)dt, \tag{1}$$

Бұл метриканың басқа ұқсас бірінші жуықтау метрикалардан айырмашылығы, (1) Шварцшильд есебін [1] сипаттауда ыңғайлы, сонымен қатар Лензе-Тирринг есебін зерттеу кезінде маңызды болып табылатын бей сызықты мүшелерді ескереді. Естеріңізге сала кетейік

$$\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = -\frac{S_0^2}{r^3} + \frac{3\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)^2}{r^5} \tag{2}$$

Лензе – Тирринг гамильтонианы былай жазылады

$$H = mc^2 + \frac{P^2}{2m} - mU - \frac{1}{c^2}\left(\frac{P^4}{8m^3} + \frac{3P^2U}{2m} + \frac{\xi_0}{m_0}mU - \frac{1}{2}mU^2\right) - \\ - \frac{2\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{P}\right) - \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\right]\right), \tag{3}$$

Мұндағы $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}}$ - сынақ денесінің импульсы, L - Лагранж функциясы. Қозғалыс теңдеуі

$$\dot{\vec{M}} = \frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_0\vec{M}\right] - \frac{12\gamma m}{7m_0c^2r^5}\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)\left[\vec{r}\vec{S}_0\right], \tag{4}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left(4E + 6mU + \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U \cdot \vec{M}\right]}{mc^2} + \frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_0\vec{A}\right] + \frac{6\gamma\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)}{mc^2r^5}\left[\vec{r}\vec{M}\right] - \\ - \frac{6\gamma}{7m_0c^2r^5}\left\{S_0^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - \frac{5}{r^2}\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - 2\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)\left[\vec{S}_0\vec{M}\right] + 2\left(\vec{S}_0\vec{r}\right)\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right]\right]\right\}, \tag{5}$$

$\vec{M}$ және $\vec{A}$ - орбитаның векторлық элементтері. Осыдан, $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлары уақытқа қатысты баяу өзгере отырып қозғалыстың екі түріне: эволюциялық және периодтық қозғалады. Шынында да, біз (4) және (5) сызықты емес механиканың асимптотикалық әдісіне – орташалау әдісіне (Ньютон периодында) қолданамыз. Сонда асимптотикалық әдістің бірінші жуықтауының дифференциалдық теңдеулері (эволюциялық қозғалыс теңдеулері) мынадай болады

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right], \qquad \frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \tag{6}$$

мұнда

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2}\vec{M} + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M^3 M_0^3 c^2}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0 M^2}\vec{S}_0 + \frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0 M^4}\vec{M}\right\} -$$
$$- \frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0 M^5 M_0^3 c^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0) + \frac{m}{7m_0}S_0^2 - \frac{3m}{7m_0 M^2}(\vec{S}_0\vec{M})^2\right\} \tag{7}$$

мұндағы $M_0 = \dfrac{M}{\sqrt{1-\dfrac{A^2}{\alpha^2}}}$ - жүйенің инварианты. Гамильтониан

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M} + \right.$$
$$\left. + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M_0^3 M^3}\left[2\left(\vec{S}_0\vec{M}\right) + \frac{mS_0^2}{7m_0} - \frac{3m}{7m_0 M^2}\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)\right]\right\} \tag{8}$$

Енді M және A векторлық элементтерге қатысты орнықтылық мәселесіне келсек, басқаша айтқанда, $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтерінің абсалют шамаларына қатысты орнықтылықты қарастырамыз. (6) түрдегі қозғалыстың эволюциялық теңдеуінен қозғалыстың интегралы шағады

$$M = const, \quad A = const \tag{9}$$

Сынақ денесінің эволюциялық қозғалысы M және A элементтерге қатысты тұрақты мәнге ие болады, яғни $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторларының абсолют мәндері тұрақты шамаға тең болады.

Сонымен қатар, (8) өрнегінен айналмалы орталық өрістегі сынақ денесінің орбиталды орнықты қозғалысы пайда болады. Екінші жағынан, (8) өрнегінен сынақ денесінің айналмалы орталық дене өрісіндегі қозғалысының орбиталық орнықтылығын байқаймыз. Шынында да, сынақ денесі қозғалысының орбиталық орнықтылығы деп біз тербелмелі эллипстің уақыттың бастапқы моменті үшін анықталған бұзылмаған Кеплер эллипсінің пішіні мен өлшемдеріне жақын пішіні мен өлшемдерін уақыттың кез келген моментінде сақтау қасиетін түсінеміз. Эллипстің пішіні мен өлшемдері e эксцентриситеттің шамасымен және $2a$ фокус осінің ұзындығымен сипатталады. Егер формулаларды анықтайтын e және a оларда ғасырлық мүшелер болмаса, онда анықтамаға сәйкес эллипстік қозғалыс орбиталық орнықтылыққа ие болады. Шынында, (8) теңдіктерінен қорытындылар шығады

$$a = \mathrm{const}, \qquad e = \mathrm{const}, \tag{10}$$

Яғни, айналмалы массивті сұйық шар өрісіндегі сынақ денесінің қозғалысының орбиталық орнықтылығы орын алады.

Қолданылған әдебиет

[1]. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961, 563 с.